FACULTATEA DE MATEMATIC A ˇ ̧SI INFORMATIC A ˇ**Algebrˇa 1 (Algebrˇa liniarˇa)** Lect. univ. dr. MODOI George Ciprian

Model de examen (modelul 1)

**Subiectul 1.**

1. Sˇa se defineascˇa urmˇatoarele notiuni: grup, spatiu vectorial, transformare liniarˇa,

bazˇa, corp, subspatiu vectorial, homomorfism de grupuri ̧si vector propriu.

2. Avândlista (**N**, +), (**N**, ·), (**N**, +, ·), (**N**∗, +, ·), (**Z**, +), (**Q**, +), (**Q**, ·), (**Q**, +, ·),

(**C**, ·), (**R**, +, ·) ̧si (**C**, +, ·), sˇa se precizeze care dintre structurile enumerate sunt grupuri, care dintre ele sunt inele ̧si care sunt corpuri.

3. Sˇa se defineascˇa notiunea de subgrup ̧si sˇa se enunteze teorema de caracterizare a subgrupului. Sˇa se scrie un exemplu de grup, un exemplu de subgrup al sˇau ̧si un exemplu de multime a sa care nu este subgrup; sˇa se justifice.

4. Sˇa se defineascˇa notiunea de subcorp ̧si sˇa se enunteze teorema de caracterizare a subcorpului. Sˇa se scrie un exemplu de corp, un exemplu de subcorp al sˇau ̧si un exemplu de multime a sa care nu este subcorp; sˇa se justifice.

**Subiectul 2.**

1. Sˇa se defineascˇa notiunea de nucleu al unei transformˇari liniare ̧si sˇa se caracterizeze

injectivitatea unei transformˇari liniare relativ la nucleul acesteia.

2. Sˇa se defineascˇa notiunea de nucleu al unui grup ̧si sˇa se caracterizeze injectivitatea

unui homomorfism de grupuri relativ la nucleul acestuia.

3. Fie spatiile vectoriale **RV**  ̧si **RV** , v := (v1, v2, v3) o bazˇa în **V**, v := (v 1, v 2, v 3) o

bazˇa în **V**  ̧si transformarea liniarˇa

f : **V** → **V** , [f](v, v ) :=

0 −1 1 0 5 0

. 0 1 −5(a) Sˇa se determine:

i. dim(Im(f)) ̧si dim(ker(f)). ii. [f](v, e ), dacˇa **V** ≡ **R**3, iar e := (e 1, e 2, e 3) este baza canonicˇa a spatiului

**R**3.

(b) Sˇa se verifice injectivitatea transformˇarii liniare f.

Pagina 1

FACULTATEA DE MATEMATIC A ˇ ̧SI INFORMATIC A ˇ4. Fie spatiile vectoriale **RV**  ̧si **RV** , v := (v1, v2, v3) o bazˇa în **V**, v := (v 1, v 2, v 3) o

bazˇa în **V**  ̧si transformarea liniarˇa

f : **V** → **V** , [f](v, v ) :=



.

(a) Sˇa se determine:

i. dim(Im(f)) ̧si dim(ker(f)). ii. [f](v, e ), dacˇa **V** ≡ **R**3, iar e := (e 1, e 2, e 3) este baza canonicˇa a spatiului

**R**3.

(b) Sˇa se verifice injectivitatea transformˇarii liniare f.

**Subiectul 3.**

1. Sˇa se discute, în functie de parametrul *α* ∈ **R**, ̧si sˇa se rezolve sistemul

(s) :

1 0 −5 0 1 0 −1 0 5

x + 2y + z = 4 x − y + 2z = 2

−x + 3y − z = 1

2x − y − z = *α*

.

2. Sˇa se discute, în functie de parametrul *β* ∈ **R**, ̧si sˇa se rezolve sistemul

(s ) :

2x −x + + y y − − z 2z = = 2

−2 3x x + − y y + + z z = 3

.

= *β*

Pagina 2

FACULTATEA DE MATEMATIC A ˇ ̧SI INFORMATIC A ˇ**Algebrˇa 1 (Algebrˇa liniarˇa)** Lect. univ. dr. MODOI George Ciprian

Model de examen (modelul 2)

**Subiectul 1.**

1. Sˇa se defineascˇa ̧si sˇa se exemplifice fiecare dintre notiunile: homomorfism de inele,

ordinul unui element al unui grup ̧si dimensiunea unui spatiu vectorial.

2. Sˇa se demonstreze cˇa vectorii v1, v2, ..., vn ∈ **V** formeazˇa o bazˇa a unui spatiu vectorial **KV** dacˇa ̧si numai dacˇa sunt liniar independenti ̧si, pentru orice vector x ∈ **V**, vectorii v1, v2, ..., vn nu mai au aceea ̧si proprietate.

3. Fie f : **V** → **W** o aplicatie liniarˇa. Sˇa se demonstreze cˇa dacˇa aplicatia f este

bijectivˇa, atunci f −1 este, de asemenea, aplicatie liniarˇa.

**Subiectul 2.**

1. Fie multimile

A :=

{(x1, x2, x3) ∈ **R**3 : 3x1 − x2 + x3 = 0}

̧si

B :=

{(x1, x2, x3) ∈ **R**3 : (x1 − x2 = 0) ∧ (x1 + 2x2 + x3 = 0)}.

Sˇa se demonstreze cˇa:

(a) A ≤ **R**3  ̧si B ≤ **R**3. (b) A ⊕ B = **R**3.

2. Fie vectorii v1 := (1, 2, 1), v2 := (1, 1, 1), v3 := (−2, 1, 1) ∈ **R**3. Sˇa se demon- streze cˇa v := (v1, v2, v3)t formeazˇa o bazˇa a spatiului **R**3  ̧si sˇa se determine [t]v, unde t := (1, 6, 4).

**Subiectul 3.**

1. Fie aplicatia

f : **R**3 → **R**3,

f(x1, x2, x3) := (−4x1 − 18x2 − 24x3, −3x1 − 7x2 − 12x3, 3x1 + 9x2 + 14x3). (a) Sˇa se demonstreze cˇa f ∈ End**R** (**R**3). (b) Sˇa se determine câte o bazˇa în subspatiile ker(f) ̧si Im(f); de asemenea, sˇa se

precizeze dim(ker(f)), respectiv dim(Im(f)).

Pagina 3